Departamento de Matemática – Universidade de Coimbra

Exercícios de Topologia e Análise Linear

A Considere uma família $(A_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de um conjunto X e $B \subseteq X$.

1. Verifique que $B \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$ e que $B \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$.
2. Mostre que se $I=\emptyset$, então $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$ e $\bigcap_{i\in I} A_i = X$.

B Sejam A, B subconjuntos de X e C, D subconjuntos de Y.

1. Verifique que $X\setminus(A\cup B) = (X\setminus A)\cap(X\setminus B)$ e que $X\setminus(A\cap B)=(X\setminus A)\cup(X\setminus B)$.
2. Mostre que $(A\times C)\cap(B\times D) = (A\cap B)\times(C\cap D)$.
3. Será que $(A\times C)\cup(B\times D) = (A\cup B)\times(C\cup D)$?
4. A partir das alíneas (a) e (b), escreva $(X\times Y)\setminus(A\times C)$ como uma reunião de conjuntos.

C

1. Sejam $(a_i)_{i\in I}$ e $(b_i)_{i\in I}$ duas famílias de números reais. Mostre que

$$\sup\{a_i \mid i\in I\} + \sup\{b_i \mid i \in I\} \geq \sup\{a_i + b_i \mid i\in I\}.$$

2. Exiba um contra-exemplo que mostre que a desigualdade contrária não se verifica.
3. Sejam agora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões crescentes de números reais. Verifique que neste caso

$$\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} + \sup\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \sup\{a_n+b_n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

D A partir da desigualdade de Hölder:

$$|\sum_{i=1}^n a_i.b_i| \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}.(\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{1/q};\ a_i,b_i\in\mathbb{R}; p,q>1 \text{ e } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;$$

mostre a desigualdade de Minkowski:

$$(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^n |b_i|^p)^{1/p};\ a_i,b_i\in\mathbb{R}; p\geq 1.$$

E Mostre que, se X e Y são conjuntos e $f: X\to Y$ é uma aplicação, então, se A, A' e A_j $(j\in J)$ são subconjuntos de X e B, B' e $B_i (i\in I)$ são subconjuntos de Y,

1. $A\subseteq A' \Rightarrow f(A)\subseteq f(A')$;
2. $B\subseteq B' \Rightarrow f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(B')$;
3. $A\subseteq f^{-1}(f(A))$;
4. $f(f^{-1}(B))\subseteq B$;
5. $f^{-1}(Y\setminus B) = X\setminus f^{-1}(B)$;
6. $f(X)\setminus f(A)\subseteq f(X\setminus A)$;
7. $f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} f(A_j))$;
8. $f(\bigcap_{j\in J} A_j)\subseteq \bigcap_{j\in J} f(A_j)$;
9. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
10. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
11. Apresente exemplos que mostrem que as inclusões das alíneas 3, 4, 6 e 8 podem ser estritas;
12. Indique uma condição que permita substituir o sinal de inclusão – em 3, 4, 6 e 8 – pelo de igualdade;
13. Mostre que na alínea 8 não se pode substituir $f(X)$ por Y.

1. (a) Verifique se $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica em $\mathbb{R}$:

   i.
   $$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 + |x-y| & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

   ii.
   $$d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

   iii. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$

   iv. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.

   (b) Descreva as bolas abertas para cada uma das métricas da alínea anterior.

2. (a) Mostre que $(\mathbb{R}^n, d_j)$ é um espaço métrico para $n, j \in \mathbb{N}$ e $dj : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   $$d_j(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^j)^{\frac{1}{j}},$$

   com $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$.

   (b) Averigue se d_∞, definida por $d_\infty(x,y) = \lim d_j(x,y)$, é uma métrica em $\mathbb{R}^n$.

3. Represente geometricamente em $\mathbb{R}^2$ a bola aberta $B_1(0,0)$ para as métricas d_1, d_2 e d_∞ do exercício anterior.

4. Prove que (X,d) é um espaço métrico para todo o conjunto X e

   $$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Sejam X um conjunto e d' uma métrica em X. Verifique quais das funções $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definidas em seguida são métricas em X:

   (a) $d(x,y) = k\, d'(x,y)$ para algum número real não negativo k;

   (b) $d(x,y) = \min\{1, d'(x,y)\}$;

   (c) $d(x,y) = \frac{d'(x,y)}{1+d'(x,y)}$;

   (d) $d(x,y) = (d'(x,y))^2$.

6. Seja X um espaço vectorial real. X diz-se um espaço vectorial normado se em X estiver definida uma aplicação $\|.\| : X \to \mathbb{R}^+$, designada por norma, que verifique as seguintes condições para todos os $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

   N1) $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$;

   N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

   N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

   (a) Prove que todo o espaço vectorial normado é um espaço métrico com a métrica definida por $d(x,y) = \|x - y\|$.

   (b) Mostre que o recíproco do resultado da alínea anterior não se verifica em geral, exibindo um espaço métrico cuja métrica não seja induzida por nenhuma norma.

7. Seja d um métrica em X, para todo $x, y \in X$, $d(x,y) \leq 1$. Consideremos a função $s : X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, com
$$s((x_n)_n, (y_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(x_n, y_n).$$
Mostre que $(X^{\mathbb{N}}, s)$ é um espaço métrico.

8. No conjunto das funções reais contínuas definidas em $[0,1]$ considere as métricas ρ do supremo e σ do integral:
$$\rho(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in [0,1]\},$$
$$\sigma(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$
   (a) Calcule, para cada uma dessas métricas, $d(\sin x, \cos x)$, $d(x^2, x)$ e $d(1-x, x^2)$.
   (b) Sejam $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ e $g(x) = x$. Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$ e a $B_1(g)$ para a métrica ρ.
   (c) Poderá dar uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções de $B_1(f)$ (ou de $B_1(g)$) para a métrica σ?

9. Sejam (X,d) um espaço métrico e x e y elementos de X.
   (a) Prove que, se x e y forem distintos, existem bolas abertas disjuntas B e B' tais que $x \in B$ e $y \in B'$.
   (b) Sejam r e s números reais positivos tais que $B_r(x) = B_s(y)$. Podemos então concluir que $x = y$ ou que $r = s$? Justifique.

10. Sejam (X,d) um espaço métrico e a um ponto de X. Mostre que:
   (a) $\{a\} = \bigcap_{r>0} B_r(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(a)$;
   (b) $B_r[a] = \bigcap_{s>r} B_s(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r+\frac{1}{n}}(a)$.

11. Seja (X,d) um espaço métrico.
   (a) Mostre que uma bola fechada é sempre um conjunto fechado em X.
   (b) Dê um exemplo que mostre que uma bola aberta pode ser um conjunto fechado.

12. Verifique quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos ou fechados:
   (a) $\mathbb{N}$; (b) $[1,2[\cup]2,3[$; (c) $\{0\} \cup \{x; x^2 > 2\}$;
   (d) $\mathbb{Q}$; (e) $[5,7] \cup \{8\}$; (f) $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

13. Verifique se os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^2$:
   (a) $]0,1[\times]0,1[$; (b) $[0,1[\times]0,1[$; (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$; (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}^2$.

14. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ o espaço métrico das funções contínuas e limitadas, de X em $\mathbb{R}$, munido da métrica do supremo. Considere o subconjunto

$$A = \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, \forall x \in X \;\; f(x) > 0\}$$

de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Mostre que:

(a) se $X = [0, 1]$, então A é aberto.

(b) se $X =]0, 1]$, então A não é aberto.

15. Considere o conjunto $X = [0, 1]$ e a métrica s do Exercício 7 no conjunto das sucessões em X. Verifique se o conjunto $A = \{(x_n)_n \,|\, \forall n \; x_n > 0\}$ é um conjunto aberto.

16. No conjunto das sucessões limitadas em $\mathbb{R}$, $L_\infty(\mathbb{R})$, consideremos a norma dada por $\|(x_n)_n\| := \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Mostre que $(L_\infty(\mathbb{R}), \|.\|)$ é um espaço normado.

(b) Verifique se $B = \{(x_n)_n \,|\, \exists k, i \; x_k > 1, \, x_i < 0\}$ é um conjunto aberto.

17. Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 + |x| & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Note que esta função é descontínua para a métrica usual em $\mathbb{R}$. Verifique porém que, se d é a métrica definida no Exercício 1(a)i, então a função $f : (\mathbb{R}, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

18. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica usual d_1 e a métrica d definida em 1(a)ii. Verifique se alguma das funções $f, g : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ é contínua, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

19. (a) Mostre que as métricas d_1, d_2 e d_∞ (Exercício 2) definem a mesma topologia em $\mathbb{R}^2$.

(b) Verifique quais das métricas d definidas no Exercício 5 são topologicamente equivalentes a d'.

(c) Compare as topologias definidas em $\mathbb{R}$ pelas métricas do Exercício 1.

20. Considere, no conjunto $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$, as métricas ρ do supremo e σ do integral.

(a) Sendo $0 < r \leq 2$, considere

$$\begin{array}{rcl} g : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{r} + 4 & \text{se } 0 \leq x < \frac{r}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{r}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

Mostre que $g \in B_r^\sigma(f) \setminus B_1^\rho(f)$, onde $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 2$.

(b) Conclua que ρ e σ não são topologicamente equivalentes.

(c) Mostre que $\mathcal{T}^\sigma \subset \mathcal{T}^\rho$.

21. Verifique quais das seguintes famílias de subconjuntos são topologias em $X=\{a,b,c,d,e\}$:
   (a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$,
   (b) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$,
   (c) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$,
   (d) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$.

22. Mostre que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]q, +\infty[\mid q \in \mathbb{Q}\}$ não é uma topologia em $\mathbb{R}$.

23. Considere o conjunto $\mathcal{T} := \{A \subseteq \mathbb{R} \,;\, \mathbb{R} \setminus A \text{ é um conjunto finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia.

   [A esta topologia chama-se topologia cofinita]

24. Prove que a intersecção de duas topologias num conjunto X ainda é uma topologia em X, mas que a sua união nem sempre é uma topologia em X. O que poderemos dizer àcerca da intersecção de uma família qualquer de topologias em X?

25. Dê exemplo de duas topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ num conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \not\subseteq \mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_2 \not\subseteq \mathcal{T}_1$.

26. Prove que, se $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua, também o é $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}'_1)$ sempre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}'_1 \subseteq \mathcal{T}'$.

27. Considere a topologia $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{]a, +\infty[\mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$. Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$ são contínuas.

28. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual. Mostre que, se toda a função $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X.

29. Considere a topologia usual em $\mathbb{R}$ e a topologia cofinita (Exercício 23). Prove que todo o subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado.

30. Determine os subconjuntos fechados do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde
$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{] - \infty, a[; a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

31. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X. Considere a função característica, $\chi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$
   (a) Prove que, se χ é contínua, então A é simultaneamente aberto e fechado;
   (b) Prove que, se A é aberto e fechado, então χ é contínua.

32. Mostre que:
   (a) o intervalo $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$;
   (b) qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.
   (c) o intervalo $[0, 1]$ não é homeomorfo ao intervalo $]0, 1]$.

33. Considere as letras do alfabeto. Diga quais delas definem subespaços de $\mathbb{R}^2$ homeomorfos. Por exemplo O e D definem espaços homeomorfos.

34. Mostre que todo o subespaço de um espaço discreto é discreto.

35. Seja $\mathcal{T}$ a topologia usual em $\mathbb{R}$.

    (a) Determine a topologia relativa $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ no conjunto $\mathbb{N}$.

    (b) Verifique se cada um dos seguintes subconjuntos de $[0,1]$ é aberto em $[0,1]$:

    i. $]1/2, 1]$;

    ii. $]1/2, 2/3]$;

    iii. $]0, 1/2]$.

36. Considere a topologia $\mathcal{U}$ do Exercício 27. $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]a, +\infty[\,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$. Determine a topologia relativa de $[0,1]$ induzida por $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

37. Considere o conjunto $\mathcal{T}_0 = \{A \,|\, A \subseteq\,]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

    (a) Mostre que $\mathcal{T}_0$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

    (b) Determine a topologia relativa de $]-\infty, 0]$ e de $]0, +\infty[$ induzida por $\mathcal{T}_0$.

    (c) Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$, com $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$ são contínuas

38. Sejam $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função contínua, A um subconjunto de X e f_A a restrição de f a A.

    (a) Mostre que, se $\mathcal{T}_A$ é a topologia relativa definida em A por $\mathcal{T}$, então $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \to (Y, \mathcal{T}')$ é contínua.

    (b) Encontre um exemplo que mostre que o resultado recíproco é falso.

39. Mostre que $\mathcal{B} = \{]r, s[\,;\, r, s \in \mathbb{Q},\ r < s\}$ é uma base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$.

40. Verifique se $\mathcal{S} = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}\}$ é uma base para uma topologia em $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e, em caso afirmativo, determine essa topologia.

41. Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$. Construa a topologia gerada por $\mathcal{U}$ quando:

    (a) $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, e\}\}$;

    (b) $\mathcal{U} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, e\}\}$.

42. Determine a topologia em $\mathbb{R}$ gerada por $\mathcal{S} = \{[x, x+1]; x \in \mathbb{R}\}$.

43. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual $\mathcal{T}$ e a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base

$$\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

    Mostre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

44. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $f : X \to [0,1]$ uma aplicação. Mostre que, se $f^{-1}(]a, 1])$ e $f^{-1}([0, b[)$ são abertos de X para todo o $a, b \in]0, 1[$, então f é contínua.

45. Seja X um espaço topológico. Mostre que, para que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua é necessário que os conjuntos $\{x \in X : f(x) > 0\}$ e $\{x \in X : f(x) < 0\}$ sejam abertos. Será suficiente?

46. Considere a seguinte topologia em $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

Indique as vizinhanças dos pontos c e d.

47. Considere a topologia $\mathcal{T}_0$ do Exercício 37. Descreva as vizinhanças dos pontos -2 e 3 relativamente a essa topologia.

48. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A e B dois subconjuntos de X. Mostre que:

   (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

   (b) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$ e $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$;

   (c) as inclusões anteriores podem ser estritas.

49. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Mostre que:

   (a) $\overline{A} = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$;

   (b) $\overline{A} = A \cup \operatorname{fr}A$;

   (c) $\operatorname{fr}A = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A$ aberto e fechado;

   (d) $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{fr}A \cup \operatorname{int}(X \setminus A)$.

50. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico metrizável, sendo $\mathcal{T}$ definida pela métrica d. Prove que a bola fechada $B_\delta[x]$ é fechada em X, mas nem sempre é o fecho de $B_\delta(x)$.

51. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um subconjunto de X. Prove que as seguintes equivalências não se verificam, exibindo contra-exemplos:

   (a) A é aberto se e só se $A = \operatorname{int}(\overline{A})$; (b) A é fechado se e só se $A = \overline{\operatorname{int}(A)}$.

52. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Compare $\operatorname{fr}(\operatorname{int}(A))$, $\operatorname{fr}(A)$ e $\operatorname{fr}(\overline{A})$.

53. Calcule o interior, o fecho, a fronteira e o conjunto derivado de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

   (a) $A =]0, 1] \cup \{2\}$;

   (b) $B = \mathbb{R}$;

   (c) $C = \mathbb{Q}$;

   (d) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

   (e) $E = \{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$;

   (f) $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

54. (a) Mostre que o conjunto $\mathcal{T}$, constituído por $\mathbb{N}$, pelo vazio e pelos conjuntos da forma $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, é uma topologia no conjunto dos números naturais.

   (b) Determine o interior, a fronteira, o fecho e o derivado dos conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2n - 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

55. Determine o interior, o fecho, a fronteira, o conjunto derivado e o conjunto dos pontos isolados de $A = [7, +\infty[$, $B = [3, 7[$ e $C = \mathbb{N}$ no espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, quando:

    (a) $\mathcal{T}$ é a topologia euclidiana;

    (b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$;

    (c) $\mathcal{T} = \{\, A \,|\, A \subseteq]-\infty, 0]\,\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

56. Considere $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, o conjuntos das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$ munido da métrica do supremo e o conjunto

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \,:\, f(x) > 0\} \cup \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \,:\, f(x) \leq -x\}$$

.

Determine o interior, o fecho e os pontos isolados de A.

57. Considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ no conjunto $X = \{a, b, c\}$ e a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, Y, \{u\}\}$ no conjunto $Y = \{u, v\}$. Determine uma base $\mathcal{B}$ da topologia produto em $X \times Y$.

58. Determine uma base para a topologia produto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ quando $\mathcal{T}$ é a topologia da alínea (b) do Exercício 55.

59. Sejam X e Y espaços topológicos e $X \times Y$ o seu espaço produto. Dados $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, mostre que:

    (a) $\mathrm{int}(A \times B) = \mathrm{int}(A) \times \mathrm{int}(B)$;

    (b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

60. No espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ verifique se as sucessões $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes, e, em caso afirmativo, para que números reais convergem, quando:

    (a) $\mathcal{T}$ é a topologia euclidiana;

    (b) $\mathcal{T}$ é a topologia discreta;

    (c) $\mathcal{T}$ é a topologia indiscreta;

    (d) $\mathcal{T}$ é a topologia cofinita;

    (e) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;

    (f) $\mathcal{T} = \{A \,|\, A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$;

    (g) $\mathcal{T}$ é a topologia gerada pela base $\{]a, b] \,|\, a, b \in \mathbb{R},\, a < b\}$.

61. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x em (X, d) se e só se a sucessão $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $\mathbb{R}$.

62. Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é separado quando $\mathcal{T}$ é definida como em cada alínea do Ex. 60.

63. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U_r \,;\, r > 0\}$, onde $U_r = \{(x, y) \,;\, \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$. Mostre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}')$ não é separado.

64. Prove que, se X é finito, $(X, \mathcal{T})$ é um espaço separado se e só se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta.

65. (a) Mostre que, se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e injectiva e Y é um espaço separado, então também X é separado.
    (b) Conclua que todo o subespaço de um espaço separado é separado.
    (c) Dê um exemplo de um espaço não separado com um subespaço não trivial separado.

66. Mostre que o produto de dois espaços separados é separado.

67. (a) Mostre que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy = 1\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$.
    (b) Conclua que as projecções de um espaço produto nos factores nem sempre são aplicações fechadas. (Sugestão: Considere o conjunto A da alínea anterior e mostre que $p_{\mathbb{R}}(A)$ não é fechado.)

68. Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço conexo, quando:
    (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;
    (b) $\mathcal{T} = \{\, A \,;\, A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\, \mathbb{R} \,\}$;
    (c) $\mathcal{T}$ tem como base $\{]a, b]\,;\, a, b \in \mathbb{R},\, a < b\}$.

69. Quais dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ são conexos?
    (a) $B_1(1, 0) \cup B_1(-1, 0)$;
    (b) $\overline{B_1(1, 0)} \cup B_1(-1, 0)$;
    (c) $\{(q, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in [0, 1]\} \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$;
    (d) o conjunto de todos os pontos que têm pelo menos uma coordenada em $\mathbb{Q}$;
    (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{x}\}$.

70. Dê exemplos de:
    (a) conexos de $\mathbb{R}^2$ cuja intersecção seja desconexa;
    (b) uma sucessão decrescente de conexos de $\mathbb{R}^2$ cuja intersecção seja desconexa.

71. (a) Dê um exemplo de um conexo de $\mathbb{R}^2$ (diferente de $\emptyset$ e de $\mathbb{R}^2$):
        i. X_1 tal que o complementar de X_1 seja conexo;
        ii. X_2 tal que o complementar de X_2 tenha duas componentes conexas;
        iii. X_4 tal que o complementar de X_4 tenha quatro componentes conexas;
        iv. X tal que o complementar de X tenha uma infinidade de componentes conexas.
    (b) Se os problemas de (a) fossem postos relativamente a $\mathbb{R}$ (em vez de $\mathbb{R}^2$), que respostas daria? Porquê?

72. Mostre que se o espaço X, não singular, é conexo e separado, então não tem pontos isolados.

73. Considere $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ o espaço topológico definido no Exercício 54.
    (a) Verifique que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ não é conexo.
    (b) A partir da alínea anterior, mostre que toda a função contínua $f : (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é constante.

74. Verifique que $A = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ é conexo mas não é conexo por arcos.

75. (a) Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subespaço conexo de $\mathbb{R}^2$.
    (b) Será necessariamente contínua uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico seja conexo?

76. Mostre que os seguintes conjuntos são conexos por arcos:
    (a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para $n > 1$;
    (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$;
    (c) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$.

77. Usando, resultados sobre conexidade, mostre que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.

78. Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas topologias definidas num conjunto A tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Mostre que, se $(A, \mathcal{T}_2)$ é compacto, então $(A, \mathcal{T}_1)$ também é compacto.

79. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ são compactos?
    (a) $[0, +\infty)$;
    (b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;
    (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 = 1\}$;
    (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 < 1\}$;
    (e) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$.

80. Verifique se os subconjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\{-2\}\cup]-1, 0[$ e $]0, 1[$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ são compactos, quando:
    (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;
    (b) $\mathcal{T} = \{\, A \,;\, A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\, \mathbb{R} \,\}$.

81. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base $\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Mostre que o intervalo $[0, 1]$ (com a topologia de subespaço de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$) não é compacto.

82. Seja X um espaço topológico. Mostre que:
    (a) a reunião finita de subespaços compactos de X é um compacto;
    (b) se X é um espaço de Hausdorff, então a intersecção de qualquer família de subespaços compactos de X é ainda um compacto;
    (c) no resultado da alínea anterior é fundamental a hipótese de que o espaço topológico X seja de Hausdorff;
    (d) um subespaço compacto nem sempre é fechado.

83. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostre que, se A não é compacto, então:
    (a) existe uma aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que não é limitada;
    (b) existe uma aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que, embora limitada, não tem máximo.

84. Considere em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a métrica usual. Mostre que existem subespaços fechados e limitados de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que não são compactos.

85. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica d definida por $d(x, y) = |x| + |y|$ se $x \neq y$ (Exercício 1(a)ii).

    Mostre que o conjunto $]-1, 1[$:
    (a) é fechado e limitado;
    (b) não é compacto.

86. Diga se o espaço métrico X é completo, quando:

    (a) $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;

    (b) $X = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$;

    (c) $X = [0, 1] \cup [2, 3]$;

    (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y \geq 1/x\}$;

    (e) X é discreto.

87. Mostre que os espaços métricos definidos nos exercícios 1(a)i e 1(a)ii são completos. Verifique se são totalmente limitados.

88. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica d definida por $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$. Mostre que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico completo.

89. Mostre que, num espaço métrico:

    (a) a união finita de subespaços completos é um subespaço completo;

    (b) a união infinita de subespaços completos nem sempre é um subespaço completo;

    (c) a intersecção de qualquer família de subespaços completos é ainda um subespaço completo.

90. Considere, no conjunto das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ munido da métrica do integral, a sucessão $(f_n : [0, 1] \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ n(x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}) & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

    para cada $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Mostre que a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

    (b) Mostre que este espaço não é completo.

    (Sugestão: Mostre que a sucessão da alínea (a) não é convergente.)

91. Considere o espaço l_∞, as sucessões reais limitadas com a métrica (norma) do supremo.

    (a) Verifique se l_∞ é completo.

    (b) Mostre que não é totalmente limitado.

    (c) Que pode dizer sobre a compacidade deste espaço?

    (d) Mostre que o subespaço de l_∞ das sucessões finitas, i.e. as sucessões que são nulas a partir de certa ordem, não é completo. Qual é o seu completamento.

92. (a) A imagem de uma sucessão de Cauchy em X por uma função contínua $f : (X, d) \to (Y, d')$ pode não ser uma sucessão de Cauchy em Y. Dê um exemplo.

    (b) O que acontece se X for completo?

93. Dê exemplos de dois espaços métricos homeomorfos, sendo um deles completo e o outro não.

94. Diga se é ou não verdade que toda a função (entre espaços métricos) cujo domínio está munido da métrica discreta é uniformemente contínua.

95. Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$, é contínua mas não é uniformemente contínua.

96. (a) Mostre que, se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então é limitada.
    (b) Indique uma tal função f e uma sucessão de Cauchy em $]a, b[$ cuja imagem por f não seja uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$.
    (c) Mostre que se $f : X \to Y$ é uniformemente contínua e X é totalmente limitado, então Y é totalmente limitado.

97. (a) Mostre que, se $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uniformemente contínua e (x_n) é uma sucessão de Cauchy, então $(f(x_n))$ é uma sucessão de Cauchy.
    (b) Mostre que a função $g : [1, +\infty[\to]0, 1]$, com $g(x) = \frac{1}{x}$, é uniformemente contínua.
    (c) Conclua que a imagem por uma função uniformemente contínua de um espaço completo pode não ser um espaço completo. (Note que g é uma bijecção uniformemente contínua com inversa contínua.)
    (d) Mostre, no entanto, que, se $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma aplicação bijectiva, uniformemente contínua, com inversa uniformemente contínua, então (X, d) é completo se e só se (Y, d') for completo.

98. Mostre que se (X_1, d_1) e (X_2, d_2) são dois completamentos do mesmo espaço métrico, então são isométricos.

    [Isto significa que o completamento é único, a menos de uma isometria.]

99. Considere o conjunto dos polinómios complexos

$$Y := \{f \,:\, f = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k, c_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad \|f\| := \sum_{k=0}^{n} |c_k|.$$

    Verifique se $(Y, \|.\|)$ é um espaço normado.

100. Considere o conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ das matrizes reais quadradas de ordem n. Verifique se $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|)$ é um espaço normado para cada uma das seguintes normas:
    (a) $\|A\| := \sup\{a_{ij} \,:\, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n\}$;
    (b) $\|A\| := |\det A|$;
    (c) $\|A\| := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i + j)\, a_{ij}$.

101. Define-se uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ de expressão analítica $\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2 + 4|x||y|}$.
    (a) Mostre que esta função não é uma norma.
    (b) Será que induz uma métrica em $\mathbb{R}^2$?

102. Mostre que em todo o espaço vectorial normado não nulo o diâmetro de qualquer bola aberta é igual ao dobro do respectivo raio.

103. Seja X um espaço vectorial normado e d uma métrica em X. Prove que d é induzida por uma norma se e só se

$$(\forall x, y \in X)\ (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \ d(x + a, y + a) = d(x, y) \text{ e } \ d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y).$$

104. (a) Seja d' a métrica Euclidiana em $\mathbb{R}$. Para cada uma das métricas do Exercício 5, averigúe se d é induzida por uma norma.

(b) Mostre que a métrica s do Exercício 7 não é induzida por uma norma.

105. Seja d uma métrica no espaço vectorial X induzida por uma norma. Mostre que o completamento de (X, d) é ainda induzida por uma norma (sendo portanto um espaço de Banach).

106. Seja X um espaço vectorial normado.

(a) i. Prove que, se X é um espaço normado, $a \in A$ e $r > 0$, então $B_r(a) = a + rD$, onde D é a bola unitária.

ii. Conclua que num espaço vectorial normado X duas bolas abertas (respectivamente fechadas) com o mesmo raio são isométricas, isto é, quaisquer que sejam $a, b \in X$, existe uma bijecção $B_r(a) \to B_r(b)$ que preserva a métrica.

iii. Mostre que para espaços métricos em geral este resultado é falso.

(b) i. Sejam X um espaço normado, $a \in X$ e $r > 0$. Mostre que:

A. $\overline{B_r(a)} = B_r[a]$;

B. $\mathrm{fr}(B_r(a)) = \{x \in X \,;\, d(x, a) = r\}$. [A fronteira da bola aberta é a esfera.]

ii. Dê exemplos de espaço métricos onde as igualdades anteriores não se verifiquem.

107. Seja X um espaço normado. Mostre que para todo o $x, y \in X$ se tem $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

108. Prove que, se X é um espaço normado, então:

(a) o operador linear $\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$ é limitado;

(b) a aplicação $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times X & \to & X \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$ é contínua;

(c) a norma $\| \cdot \| : X \to [0, +\infty[$ é uniformemente contínua.

109. Nos exemplos seguintes verifique se T é um operador linear limitado. Em caso afirmativo calcule a sua norma.

(a) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $T : l_2^n \to \mathbb{R}$ definido por $T(x) = A.x$, para A uma matriz linha $1 \times n$.

(b) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $T : l_2^n \to l_2^m$ definido por $T(x) = (x_1, \cdots, x_l, 0, \cdots, 0)$, onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $l = \min(m, n)$.

(c) No espaço $\mathcal{C}[0, 1]$ das funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$ munido da métrica do supremo escolhe-se $t_0 \in [0, 1]$ e define-se $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ por $T(f) = f(t_0)$.

(d) No subespaço de $\mathcal{C}[0, 1]$ das funções diferenciáveis com derivada contínua, define-se $T : X \to \mathcal{C}[0, 1]$ por $T(f) = f'$.

(e) $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ com $T(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

110. Sejam Y e Z subespaços vectoriais de X tais que $Y \cap Z = 0$ e $Y + Z = X$. Mostre que:

(a) $X = Y \oplus Z$ se e só se X tem a topologia produto, quando identificado com $Y \times Z$.

(b) Se $X = Y \oplus Z$, então a projecção $X \to Y$ induz um isomorfismo $X/Z \to Y$.

111. Se X e Y são espaços normados, prove que

$$\|(x,y)\|_1 = \|(\|x\|,\|y\|)\|_1 \quad \text{e} \quad \|(x,y)\|_\infty = \|(\|x\|,\|y\|)\|_\infty$$

são normas no espaço soma directa $X \oplus Y$. Mostre que estas normas são equivalentes.

112. Considere $\mathcal{C}[-1,1]$ munido da norma do integral, i.e. $\|f\| = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$.

(a) Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, com $h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ -nx+1 & \text{se } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$.

(b) Diga porque $\mathcal{C}[-1,1]$ não é completo.

(c) Averigúe se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ é absolutamente convergente.

113. Seja $(\|\cdot\|_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ é uma família de normas no espaço vectorial V. Prove que $\|\cdot\| = \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} \|\cdot\|_\gamma$ é uma norma em V, mas, em geral, $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \|\cdot\|_\gamma$ não é uma norma.

114. Seja Y um subespaço do espaço normado X. Prove que Y é um subespaço fechado se e só se a sua bola fechada unitária é fechada em X.

115. (a) Seja Z um subespaço fechado do espaço normado X. Verifique que a projecção $X \to X/Z$ no espaço normado quociente é um operador linear limitado. Calcule a sua norma.

(b) Sejam $T : X \to Y$ um operador linear limitado, $Z = \ker T$ e $T_0 : X/Z \to Y$ o operador linear limitado definido por T. Prove que $\|T_0\| = \|T\|$.

116. Seja Y um subespaço fechado do espaço normado X. Prove que, se os espaços X e Y são completos, então X/Y é completo.

117. Sejam X um espaço vectorial complexo, $X_\mathbb{R}$ o mesmo espaço considerado como espaço vectorial real e $f \in X_\mathbb{R}^*$.

(a) Mostre que $(g : X \longrightarrow \mathbb{C}) \in X^*$, com $g(x) = f(x) - if(ix)$.

(b) Prove que $f_1, f_2 \in X_\mathbb{R}^*$, com $f_1 = Re(f)$ e $f_2 = Im(f)$.

(c) Verifique que $f(x) = f_1(x) - if_1(ix) = f_2(ix) + if_2(x)$.

(d) Conclua que os espaços vectoriais X^* e $X_\mathbb{R}^*$ são isomorfos.

118. Determine em $(\mathbb{R}^2)^*$ as bases duais das bases $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,1),(1,-1)\}$, respectivamente.

119. Considere o espaço vectorial complexo $\mathbb{C}^n$.

(a) Mostre que $< x, y >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i.\overline{y_i}$ define um produto interno em $\mathbb{C}^n$, com $x = (x_i)_{i=1}^n$ e $y = (y_i)_{i=1}^n$.

(b) Verifique que para $p \neq 2$, o espaço normado complexo (e real) l_2^n não é um espaço de Hilbert.

120. Consideremos $\mathcal{C}[0,2\pi]$ munido do produto interno do integral, $< f, g >= \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$. Sejam ainda e_n e f_n funções tais que $e_n(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}$, $\quad f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$.
Mostre que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sucessões ortonormadas.